УДК 62-50

В. И. Максимов

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА*

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$Mu(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)\,ds = f_1(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta]. \tag{1}$$

Здесь $u(\cdot)\colon t \to \mathbb{R}^r$ — неизвестная функция, M — матрица размерности $r \times r$, $K(\cdot,\cdot)\colon T \times T \to R^{r\times r}$ — известное ядро, непрерывное по совокупности переменных и непрерывно-дифференцируемое по второму аргументу, непрерывно-дифференцируемая функция $f_1(\cdot)$ задана неточно: известно приближение $\xi^h(\cdot)$ ее интеграла в дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $t_0 = 0$, $n = \vartheta/\delta$, $i = [0 : m-1]$, такое, что

$$\left|\xi_i^h - \int_{t_0}^{\tau_i} f_1(\tau)\,d\tau\right|_r \leqslant h. \tag{2}$$

Задача заключается в построении устойчивого к информационным помехам h и погрешностям вычислений алгоритма нахождения приближенного решения уравнения (1).

Литература, посвященная вопросам нахождения приближенных решений интегральных уравнений Вольтерра как первого, так и второго рода достаточно обширна (см., например, [1–5]). Интерес к подобным уравнениям вызван в значительной степени тем фактом, что целый ряд объектов математической физики, геофизики и механики описывается именно такими уравнениями. В настоящей работе мы укажем алгоритм решения уравнения (1), который основан на сочетании принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского с методом управления с моделью. Предлагаемый алгоритм конструируется на базе идеологии подхода, развитого в работах [6–10].

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00008), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 22 «Процессы управления», Урало-сибирского интердисциплинарного проекта, Российского гуманитарного научного фонда, проект № 05-02-02118а.

2. Алгоритм решения

Перейдем к описанию алгоритма решения уравнения (1). Для простоты ниже считаем $t_0 = 0$.

Пусть выполнено

Условие 1. Матрица M размерности $r \times r$ невырождена.

Выберем семейство Δ_h равномерных разбиений отрезка T на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, $\tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h)$, $m_h = \vartheta/\delta(h)$, $i \in [0 : m_h - 1]$, $\tau_{0,h} = 0$, $\tau_{m_h,h} = \vartheta$.

В начальный момент $t_0 = 0$ фиксируется величина h и равномерное разбиение Δ_h промежутка T на интервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = i_m \in [0 : m-1]$, $m = m_h$. Работу алгоритма разобьем на $m - 1$ однотипных шагов. На i-м шаге, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, исходными данными для вычислений служат значение измерения ξ_i^h и сформированное к моменту τ_i «приближенное решение» $w(t) = \{w^{(1)}(t), w^{(2)}(t)\}$, $t \leqslant \tau_i$, вспомогательной системы уравнений, имеющей вид

$$\begin{aligned}
&\dot{w}^{(1)}(t) = v^h(t),\\
&w^{(2)}(t) = w^{(3)}(t), \quad t \in T, \quad w^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = 0,\\
&w^{(3)}(t) = \int_0^t K(t,\tau) v^h(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь $w^{(j)}(t) \in \mathbb{R}^r$, $j = 1, 2, 3$, $v^h(t)$ – вспомогательное управление, которое находится по формуле

$$v^h(t) = v_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$v_i^h = \begin{cases} M^{-1}|\nu_i^h| s_i/|s_i|_r, & \text{если } |s_i|_r \neq 0,\\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

$$\nu_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1} - \psi_i^{(3)}, \quad |\psi_i^{(3)} - w^{(3)}(\tau_i)|_r \leqslant h, \tag{4}$$

вектор s_i определяется соотношением $s_i = -\psi_i^{(1)} - \psi_i^{(2)}$, где

$$|\psi_i^{(1)} - w^{(1)}(\tau_i)|_r \leqslant h, \quad |\psi_i^{(2)} - w^{(2)}(\tau_i)|_r \leqslant h.$$

Ниже символ $|x|_r$ означает евклидову норму вектора x в пространстве $\mathbb{R}^r$, символ $|M|$ — евклидову норму матрицы M, а символ $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

Тот факт, что функция $v^h(\cdot)$ может служить приближением решения $u(\cdot)$ уравнения (1), следует из приведенной ниже теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f_1(\cdot) \in C_1(T;\mathbb{R}^r)$, $v^h(t) = 0$ *при* $t \in [t_0, \tau_1]$,

$$\delta(h) \to 0, \quad h/\delta(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{5}$$

Тогда имеет место сходимость

$$v^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в } L_2(T;\mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Поскольку матрица M имеет размерность $r \times r$ и является невырожденной, то решение уравнения (1) из пространства $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ существует и единственно. В таком случае естественно пытаться построить семейство функций $v^h(\cdot)$, $h \in (0,1)$ (приближение истинного решения) со свойством

$$\sup_{t\in[\tau_1,\vartheta]} \left| \int_{\tau_1}^{t} \Big\{ f_1(\tau - \delta(h)) - Mv^h(\tau) - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{\tau} K(\tau,\eta) v^h(\tau)\, d\eta \Big\}\, d\tau \right|_r \leqslant \nu(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+,$$

что мы и сделаем.

3. Доказательство сходимости алгоритма

При доказательстве следующей леммы нам понадобится

Дискретное неравенство Гронуолла [11, с. 311]. *Пусть* $\varepsilon_j \geqslant 0$, $f_j \geqslant 0$, $f_{j+1} \geqslant f_j$, $i \in [1:m]$, *и* $f_0 \geqslant \varepsilon_1$. *Тогда, если* $c_0 = \mathrm{const} > 0$, *из неравенств*

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant c_0 \delta \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i + f_j, \quad j \in [2:m-1],$$

следует неравенство

$$\varepsilon_{j+1} \leqslant \exp(c_0 j \delta) f_j, \quad j \in [0:m-1].$$

Символом $\Xi(h)$ мы обозначим семейство кусочно-постоянных функций $\xi_i^h = \xi^h(t)$, $t \in [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h})$, $i \in [0:m_h-1]$, удовлетворяющих условию (3).

Лемма 1. *Равномерно по всем* $h \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$, $h\delta^{-1} \leqslant 1$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(h)$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^{\vartheta} |v^h(\tau)|_r^2\, d\tau \leqslant c.$$

Здесь постоянная c не зависит от h, δ и $\xi^h(\cdot)$.

Доказательство. В силу правила определения векторов v_i^h (3) имеем

$$|v_i^h|_r \leqslant \big|M^{-1}\big|\big\{\delta^{-1}|\xi_i^h - \xi_{i-1}^h|_r + |w^{(3)}(\tau_i)|_r + h\big\}. \tag{6}$$

В таком случае

$$\delta|v_i^h|_r^2 \leqslant \lambda_{1i} + \lambda_{2i}, \tag{7}$$

где

$$\lambda_{1i} = 2\big|M^{-1}\big|\delta^{-1}\big|\xi_i^h - \xi_{i-1}^h\big|_r^2, \quad \lambda_{2i} = 4\delta\big|M^{-1}\big|\big\{|w^{(3)}(\tau_i)|_r^2 + h\big\}.$$

Далее, имеем

$$|w^{(3)}(\tau_i)|_r \leqslant \int_0^{\tau_i} c_*|v^h(\tau)|_r\,d\tau \leqslant \delta c_* \sum_{j=0}^{i} |v_j^h|_r, \tag{8}$$

где $\sup_{\substack{t,\tau\in[0,\vartheta]\\ t\geqslant\tau}} |K(t,\tau)| \leqslant c_*$. В силу неравенства Коши–Буняковского из (8) выводим

$$|w^{(3)}(\tau_i)|_r^2 \leqslant \delta c_*^2 \sum_{j=1}^{i} |v_j^h|_r^2.$$

Таким образом,

$$\lambda_{2i} \leqslant c_1\delta^2 \sum_{j=1}^{i} |v_j^h|_r^2 + c_2\delta h^2. \tag{9}$$

Очевидно также (см. условие $h\delta^{-1} \leqslant 1$), что

$$\lambda_{1i} \leqslant c_1\delta. \tag{10}$$

Пусть

$$\varrho_i = \int_0^{\tau_i} |v^h(\tau)|_r^2\,d\tau = \sum_{j=0}^{i} \delta|v_j^h|_r^2.$$

Из (6)–(10) (учитывая включение $h \in (0,1)$), получаем

$$\varrho_i \leqslant f_i + c_1\delta \sum_{j=0}^{i} \varrho_i. \tag{11}$$

Здесь $f_i = (c_1 + c_2)\tau_i$. В силу условия леммы $\sum_{i=0}^{m-1} f_i \leqslant c_3$. Поэтому из (11), в силу приведенного выше дискретного неравенства Гронуолла, следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть

$$\varepsilon(t, v^h(\cdot)) = \left| \int_0^t \Big\{ f(\tau) - Mv^h(\tau) - \int_0^\tau K(\tau,\eta) v^h(\eta)\, d\eta \Big\}\, d\tau \right|_r^2, \quad t \in T,$$

где $f(\tau) = f_1(\tau - \delta(h))$. При $\tau \in [-\delta(h), 0]$ считаем $f_1(\tau) \equiv 0$.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\varepsilon(t, v^h(\cdot)) \leqslant k_* \{F_1(\delta, h) + \delta\},$$

где

$$F_1(\delta, h) = \omega_k(\delta) + h\delta^{-1},$$

$$\omega_k(\delta) = \sup\Big\{ \big|K(\tau_1,\tau) - K(\tau_2,\tau)\big| : \tau \in T,\ \tau_1, \tau_2 \in T,\ \tau_1 \geqslant \tau, \tau_2 \geqslant \tau, |\tau_1 - \tau_2| \leqslant \delta \Big\},$$

постоянная k_* не зависит от $\xi^h(\cdot)$, δ и может быть выписана в явном виде.

Доказательство. Оценим величины $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, v^h(\cdot))$ при $i \in [1 \colon m_h - 1]$ $(\tau = \tau_{i,h},\ \delta = \delta(h))$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t+\Delta t} d(t+\Delta t, \eta) v^h(\eta)\, d\eta - \int_0^t d(t,\eta) v^h(\eta)\, d\eta = \\ = \int_0^{t+\Delta t} d(t+\Delta t, \eta) v^h(\eta)\, d\eta + I(t, \Delta t), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\int_0^{\tau_i} \int_0^\tau K(\tau,\eta) v^h(\eta)\, d\eta\, d\tau = \int_0^{\tau_i} \Big(\int_\eta^{\tau_i} K(\tau,\eta)\, d\tau \Big) v^h(\eta)\, d\eta, \tag{13}$$

где

$$d(\tau, \eta) = \int_\eta^\tau K(\xi, \eta)\, d\xi, \quad t \geqslant \eta,$$

$$I(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_0^t K(\tau,\eta) v^h(\eta)\, d\eta\, d\tau, \quad \Delta t \in (0, \vartheta - t_0).$$

Учитывая (12), (13), получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \left| \int_0^{\tau_{i+1}} \varrho(\tau; v^h(\cdot))\, d\tau \right|_r = \left| \int_0^{\tau_i} \varrho(\tau; v^h(\cdot))\, d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \nu_i(\tau; v^h(\cdot))\, d\tau \right|_r^2.$$

Здесь

$$\varrho(\tau; v^h(\cdot)) = f(\tau) - Mv^h(\tau) - \int_0^\tau K(\tau,\eta) v^h(\tau)\, d\eta,$$

$$\nu_i(\tau; v^h(\cdot)) = f(\tau) - \{M + d(\tau_{i+1}, \tau)\}v^h(\tau) - \int_0^{\tau_i} K(\tau, \eta)v^h(\eta)\,d\eta.$$

В таком случае

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \varepsilon(\tau_i) + 2\left(r_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \nu_i(\tau; v^h(\cdot))\,d\tau\right) + \left|\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \nu_i(\tau; v^h(\cdot))\,d\tau\right|_r^2, \quad (14)$$

где

$$r_i = \int_0^{\tau_i} \varrho(\tau; v^h(\cdot))\,d\tau.$$

Заметим, что

$$|s_i - r_i|_r \leqslant 3h.$$

Поэтому, в силу (12)–(14), справедливо неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \mu_i + I_i + 6hI_i^{1/2},$$

$$\mu_i = 2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \nu_i(\tau; v^h(\cdot))\,d\tau\right), \quad I_i = \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu_i(\tau; v^h(\cdot))|_r\,d\tau\right)^2. \quad (15)$$

Далее имеем

$$\mu_i \leqslant \lambda_i + \lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)} - 2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} Mv^h(\tau)\,d\tau\right). \quad (16)$$

Здесь

$$\lambda_i = 2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau)\,d\tau\right), \quad \lambda_i^{(1)} = -2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d(\tau_{i+1}, \tau)v^h(\tau)\,d\tau\right),$$

$$\lambda_i^{(2)} = -2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\int_0^{\tau_i} K(\tau, \eta)v^h(\eta)\,d\eta\right)d\tau\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_i^{(1)} \leqslant 2\delta|s_i|_r k^0 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(\tau)|_r\,d\tau, \quad (17)$$

$$|d(\tau_i, \tau)| \leqslant k^0\delta \quad \text{для} \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in [1:m],$$
$$k^0 = \sup\big\{|K(\tau, \eta)| : 0 \leqslant \eta \leqslant \tau \leqslant \vartheta\big\}.$$

В свою очередь, имеем

$$\lambda_i^{(2)} \leqslant -2\left(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} w^{(3)}(\tau_i)\,d\tau\right) + 2|s_i|_r\delta\omega_k(\delta)\int_0^{\tau_i} |v^h(\eta)|_r\,d\eta. \quad (18)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\lambda_i = 2\Big(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1(\tau - \delta)\,d\tau\Big) \leqslant 2\Big(s_i, \delta\Big(\frac{\xi_i^h - \xi_{i-1}^h}{\delta}\Big)\Big) + 4|s_i|_r h. \qquad (19)$$

Из (16)–(19) получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + 2\Big(s_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1} - Mv^h(\tau) - w^{(3)}(\tau_i))\}\,d\tau + \qquad (20)$$

$$+\, 2\delta|s_i|_r\{2h\delta^{-1} + \omega_k(\delta)\int_0^{\tau_i} |v^h(\eta)|_r\,d\eta + k^0 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(\eta)|_r\,d\eta\} + I_i + 4hI_i^{1/2}.$$

Легко видеть также справедливость неравенств

$$|s_i|_r \leqslant k_0 + k_1 \int_0^{\tau_i} |v^h(\tau)|_r\,d\tau, \qquad (21)$$

$$I_i \leqslant k_2\delta^2 + k_3\delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(\eta)|_r^2\,d\eta. \qquad (22)$$

Воспользовавшись леммой 1, после несложных преобразований из (21), (22) получим

$$|s_i|_r \leqslant k_4, \qquad \sum_{i=0}^{m_h-1} I_i \leqslant k_5\delta. \qquad (23)$$

В силу (3) и условия 1 второе слагаемое в правой части неравенства (20) неположительно. Поэтому из (20), (23), в силу леммы 1, следует

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + k_6\delta\left(F_1(\delta, h) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(\eta)|_r\,d\eta\right) + 2I_i \leqslant k_7\left(\delta + F_1(\delta, h)\right). \qquad (24)$$

Кроме того,

$$\varepsilon(t) \leqslant 2\varepsilon(\tau_i) + 2I_i \leqslant 2\varepsilon(\tau_i) + 2k_8\delta, \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}). \qquad (25)$$

Таким образом, из (24), (25) при $t \in T$ получаем $\varepsilon(t, v^h(\cdot)) \leqslant k_*\{F_1(\delta, h) + \delta\}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \textit{слабо в } L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \textit{при } h \to 0.$$

Доказательство. Предполагая противное, заключаем: найдутся $\{\Delta_{h_j}\}$ и $\xi^{h_j}(\cdot) \in \Xi(h_j)$ такие, что $h_j \to +0$ при $j \to +\infty$, однако

$$v^{h_j}(\cdot) \not\to u(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{26}$$

Как мы уже отмечали, интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$f_1(t) = Mu(t) + \int_0^t K(t,\eta)u(\eta)\,d\eta, \quad t \in T, \tag{27}$$

имеет единственное в пространстве $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ решение $u(\cdot)$. Выбирая, если нужно, подпоследовательность и учитывая лемму 1, получаем

$$v^{h_j}(\cdot) \to v(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j \to +\infty, \quad v(\cdot) \neq u(\cdot). \tag{28}$$

Из леммы 2 имеем при $j \to +\infty$

$$\max_{t\in[\tau_{1,h_j},\vartheta]} \left| \int_0^t \Big\{ f_1(\tau - \delta(h_j)) - Mv^{h_j}(\tau) - \int_0^\tau K(\tau,\eta)v^{h_j}(\eta)\,d\eta \Big\}\,d\tau \right|_r^2 \leqslant$$
$$\leqslant F\big(\delta(h_j),h_j\big) \to 0.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$f_1(t) = Mv(t) + \int_0^t K(t,\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad t \in T.$$

Поэтому $v(\cdot) = u(\cdot)$. Однако это равенство вместе с (28) противоречит (27). Лемма доказана.

Лемма 4. *Равномерно по всем разбиениям $\{\Delta_h\}$, $h \in (0,1)$, с диаметрами $\delta = \delta(h)$ и функциям $\xi^h(\cdot) \in \Xi(h)$, $|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leqslant h$, справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T} \left| \int_0^t \big\{ v^h(\tau) - u(\tau) \big\}\,d\tau \right|_r \leqslant c\big\{\delta^{1/2}(h) + h/\delta(h)\big\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varrho_h(t) = \left| \int_0^t \{u(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau \right|_r,$$
$$\mu_1(t,u(\cdot),v^h(\cdot)) = 2\left| \int_0^t \int_0^s K(s,\tau)\{u(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau\,ds \right|_r.$$

Из леммы 2 и равенства (27) следует оценка

$$\left|\int_0^t \{f_1(\tau-\delta(h)) - f_1(\tau) - M\{v^h(\tau)-u(\tau)\} - \right.$$
$$\left. - \int_0^\tau K(\tau,\eta)\{v^h(\eta)-u(\eta)\}\,d\eta\right|_r \leqslant k_*\{\delta + F_1(\delta,h)\} \text{ для любого } t\in T. \quad (29)$$

Кроме того, как нетрудно видеть, имеем

$$\left|\int_0^t \{f_1(\tau-\delta(h)) - f_1(\tau)\,d\tau\right|_r \leqslant c_1\delta^{1/2}, \quad t\in T. \quad (30)$$

В таком случае из (29), (30) получаем

$$\left|\int_0^t M\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\,d\tau\right|_r \leqslant c_2\{\delta^{1/2} + F_1(\delta,h)\} + \mu_1(t;u(\cdot),v^h(\cdot)). \quad (31)$$

Ввиду непрерывной дифференцируемости функций $K(t,\tau)$ для оценки второго слагаемого в правой части неравенства (31) можно воспользоваться интегрированием по частям. В результате получим

$$\mu_1(t,u(\cdot),v^h(\cdot)) \leqslant c_3\int_0^s \varrho_h(\tau)\,d\tau. \quad (32)$$

В силу невырожденности матрицы M верно неравенство

$$c_4\varrho_h(t) \leqslant \left|\int_0^t M\{v^h(\tau)-u(\tau)\}\,d\tau\right|_r, \quad (33)$$

где $c_4 > 0$ постоянная, выписываемая в явном виде. В силу (31)–(33) выводим

$$\varrho_h(t) \leqslant c_4^{-1}\left(c_2\{\delta^{1/2}+F_1(\delta,h)\} + c_3\int_0^t \varrho_h(\tau)\,d\tau\right), \quad t\in T.$$

Теперь осталось воспользоваться дискретным неравенством Гронуолла. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Перейдем к доказательству сильной сходимости $v^h(\cdot)$ к $u(\cdot)$ (в $L_2(T;\mathbb{R}^r)$). В силу (3), если $|s_i|_r \neq 0$, справедливо неравенство

$$|v_i^h|_r \leqslant \left|M^{-1}\right| \left|\delta^{-1}(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - f_1(\tau_i) + Mu(t) + \int_0^{\tau_i} K(\tau_i,\tau)(u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau + \varphi_i^h\right|_r,$$

где $\varphi_i^h = \varphi_i^{(3)} - w^{(3)}(\tau_i)$, $|\varphi_i^h|_r \leqslant h$. Легко видеть, что

$$|\delta^{-1}(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - f_1(\tau_i)|_r \leqslant 2(h\delta^{-1} + \omega_{f_1}(\delta)),$$

$$\omega_{f_1}(\delta) = \sup\big\{|f_1(\tau_1) - f_2(\tau_1)|_r \ :\ \tau_1, \tau_2 \in T,\ |\tau_1 - \tau_2| \leqslant \delta\big\}.$$

Таким образом, имеем при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m-1]$,

$$|v_i^h|_r \leqslant 2\big|M^{-1}\big|\big(h\delta^{-1} + \omega_{f_1}(\delta)\big) + |u(t)|_r + \mu_h^0.$$

Здесь

$$\mu_h^0 = \max_{i\in[1:m]} \left| M^{-1} \int_0^{\tau_i} K(\tau_i, \tau) \Big(u(\tau) - v^h(\tau)\Big)\, d\tau \right|_r .$$

Ввиду непрерывности функции $K(t,\tau)$ по совокупности переменных из слабой сходимости $v^h(\cdot)$ к $u(\cdot)$ следует сходимость μ_h^0 к нулю:

$$\mu_h^0 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+ .$$

В таком случае имеем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m-1]$,

$$|v_i^h|_r \leqslant |u(t)|_r + \mu_h,$$

где

$$\mu_h = 2\big|M^{-1}\big|\big(h\delta^{-1} + \omega_{f_1}(\delta)\big) + \mu_h^0.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\int_0^\vartheta |v^h(\tau)|_r^2\, d\tau \leqslant (1+\beta) \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2\, d\tau + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mu_h^2, \tag{34}$$

каково бы ни было $\beta \in (0,1)$. Пусть $\beta = \beta_h \to 0$ при $h \to 0+$, причем

$$\mu_h^2 \beta_h^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+ .$$

Тогда, переходя к пределу в (34), получаем

$$\varlimsup_{h\to 0} \int_0^\vartheta |v^h(\tau)|_r^2\, d\tau \leqslant \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2\, d\tau.$$

Кроме того, в силу известного свойства слабого предела

$$\varliminf_{h\to 0} \int_0^\vartheta |v^h(\tau)|_r^2\, d\tau \geqslant \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2\, d\tau.$$

Значит,

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\vartheta |v^h(\tau)|_r^2\, d\tau = \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2\, d\tau.$$

Последнее соотношение с учетом слабой сходимости $v^h(\cdot)$ к $u(\cdot)$ означает, что

$$v^h(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Агеев А. Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения 1 рода // Изв. вузов. Математика. 1983. Т. 250, № 3. С. 67–68.

2. Апарцин А. С. Численное решение интегрального уравнения Вольтерра 1 рода с приближенно заданным ядром // Прикладная математика. Новосибирск, 1982. С. 138–146.

3. Васин В. В., Сидоров А. Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13–27.

4. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

6. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.

7. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995.

8. Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во Ин-та математики и механики УрО РАН, 2000.

9. Максимов В. И. Позиционное моделирование неограниченных управлений для нелинейных систем с диссипацией // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 22–30.

10. Розенберг В. Л. Задача динамического восстановления функции источника в параболическом уравнении // Тр. ИММ УрО РАН. Екатеринбург. 1995. Т. 3. С. 183–202.

11. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 12.11.2007 г.